MATHEMATICS

ZWEIFACHE HOMOGENITÄT UND SYMMETRIE

VON

HANS FREUDENTHAL

(Communicated at the meeting of June 25, 1966)

H. C. WANG [1]) bestimmte die zweifach homogenen *kompakten Riemannschen Räume*. Aus einer weit allgemeineren Fragestellung von J. TITS [2]) ergaben sich u.a. *alle* zweifach homogenen Riemannschen Räume. Ein einfacher Zugang zu diesen Resultaten wurde von H. FREUDENTHAL [3]) aufgezeigt.

Ein schwaches Teilergebnis lautet:

Satz: Die zweifach homogenen Riemannschen Räume sind symmetrisch.

Kürzlich hat H. O. SINGH VARMA [4]) mit tiefen Hilfsmitteln eine Variante zum Wangschen Beweis dieses Satzes konstruiert. Wenn man aus der unter [3]) zitierten Arbeit das für dies Teilergebnis Nötige isoliert, erhält man einen mühelosen Beweis, bei dem obendrein fallunterscheidende Verifikationen eine nur geringe Rolle spielen. Das soll hier auseinandergesetzt werden. Aus [3]) benutzen wir nur allgemeine Resultate, also nichts, was Verifikationen erfordert.

1. F sei eine (zusammenhängende) Lie-Gruppe, J eine kompakte Untergruppe, die keine normale Untergruppe $\neq (1)$ von F enthält, R der homogene Raum F/J; $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{J}$ seien die zugehörigen infinitesimalen Algebren.

ϑ sei die (lineare) Darstellung von J bzw. $\mathbf{J}$ in $\mathbf{F}$ als Untergruppe bzw. Subalgebra der adjungierten von $\mathbf{F}$, also

$$(\vartheta j)\mathbf{x} = j\mathbf{x}j^{-1},\ (\vartheta \mathbf{j})\mathbf{x} = [\mathbf{j}, \mathbf{x}] \text{ für } j \in J,\ \mathbf{j} \in \mathbf{J},\ \mathbf{x} \in F.$$

Da J kompakt ist, gibt es ein lineares Komplement $\mathbf{K}$ von $\mathbf{J}$ in $\mathbf{F}$, das bei ϑJ und $\vartheta \mathbf{J}$ invariant ist,

$$[\mathbf{J}, \mathbf{K}] \subset \mathbf{K}.$$

Durch

$$\mathbf{k} \to (\exp \mathbf{k})J$$

---

[1]) Annals of Math., (2) **55**, 177–191 (1952). Siehe auch Pacific Journal Maths., **1**, 473–480 (1951).

[2]) Bull. Soc. Math. Belg., **1952**, 44–52 (1953); **1953**, 124–125 (1953).

[3]) Math. Zeitschr., **63**, 374–405 (1954).

[4]) Proc. Kon. Akad. Wet., **A68**, 746–753 (1965).

wird eine 0-Umgebung in $\boldsymbol{K}$ auf eine J-Umgebung in F/J abgebildet. $\boldsymbol{K}$ lässt sich als lokales Modell von F/J auffassen. J wirkt da durch seine Darstellung ϑ.

2. Ein Stamm [5]) von $\boldsymbol{J}$ heisse $\boldsymbol{H}$. Bzgl. $\boldsymbol{H}$ sei W das System der Wurzelformen von $\boldsymbol{J}$, das der Gewichte von ϑ heisse Λ.

Wurzelform- und Gewichts-Vektoren suche man in der komplexen Erweiterung von $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{K}$.

Komplexe Erweiterung wird durch einen Index Com angedeutet.

3. Sei nun ϑ auf $\boldsymbol{K}$ irreduzibel. Dann gilt:

3.1. Ist $\boldsymbol{F}$ nicht halbeinfach, so kann $\boldsymbol{K}$ als abelsches Ideal angenommen werden.

3.2. Ist $\boldsymbol{F}$ halbeinfach, aber nicht einfach, so ist direkt $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{F}_i=(\boldsymbol{O})$; es gibt einen Automorphismus φ von $\boldsymbol{F}$, der $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ vertauscht und $\boldsymbol{J}$ elementweise invariant lässt; $\boldsymbol{K}$ kann als Menge der $\boldsymbol{x}=-\varphi\boldsymbol{x}$ angenommen werden; $[\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}] \subset \boldsymbol{J}$. Auf $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ wirkt ϑJ äquivalent.

3.3. Ist $\boldsymbol{F}$ halbeinfach und einfach, aber komplex nicht einfach, so ist direkt $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Com}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}} \cap \boldsymbol{F}_i=(\boldsymbol{O})$; es gibt einen Automorphismus φ von $\boldsymbol{F}$, der, auf $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Com}}$ fortgesetzt, $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ vertauscht und $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}}$ elementweise invariant lässt; $\boldsymbol{K}$ kann als Menge der $\boldsymbol{x}=-\varphi\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}$ angenommen werden; $[\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}] \subset \boldsymbol{J}$. Auf $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}}$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ wirkt ϑJ äquivalent.

Zu 3.1. Sei $\boldsymbol{A}$ maximal abelsches Ideal von $\boldsymbol{F}$. Dann $\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{J}$. $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{A}$ ist bei ϑJ invariant. In $\boldsymbol{F}$ mod $\boldsymbol{J}$ induziert ϑ eine irreduzible Darstellung von J, bei der $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{A}$ mod $\boldsymbol{J}$ invarianter Unterraum ist. Also $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K}$. Daher kann $\boldsymbol{K}$ auch in $\boldsymbol{A}$ angenommen werden.

Zu 3.2. Sei $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ direkt. Man zeigt $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{F}_i$ wie soeben. $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{F}_1$ wird durch $\boldsymbol{J}$ und durch $\boldsymbol{F}_2$ idealisiert, also durch $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$. Also $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{F}_1=(\boldsymbol{O})$. Ebenso $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{F}_2=(\boldsymbol{O})$. Durch die Summenzerlegung von $\boldsymbol{J}$ nach $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ wird der gewünschte Automorphismus vermittelt. Das Übrige ist evident.

Zu 3.3. Nun $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Com}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ direkt, wo $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$ und $\vartheta\boldsymbol{J}$ die $\boldsymbol{F}_i$ irreduzibel invariant lässt. $(\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}} \cap \boldsymbol{F}_1)+(\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}} \cap \boldsymbol{F}_2)$ ist komplexe Erweiterung der infinitesimalen Algebra einer *kompakten* Lie-Gruppe, kann also nicht komplex zerfallen. Also wieder $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}} \cap \boldsymbol{F}_i=(\boldsymbol{O})$. Von hieraus schliesst man wie in 3.2 weiter.

4. Es wird nun angenommen:

4.1. $R=F/J$ trägt eine F-invariante Riemannsche Metrik,

4.2. für gewisses positives ϱ, das kleiner als der Durchmesser von R ist, ist F im Kleinen transitiv über der Menge der geordneten Punktepaare mit dem Abstand ϱ.

Unter diesen Voraussetzungen wird in 5. 8–10 bewiesen:

4.3. $\boldsymbol{K}$ kann so angenommen werden, dass

$$[\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}] \subset \boldsymbol{J},$$

---

[5]) Cartan-Subalgebra.

oder

$$\boldsymbol{F} \in \mathfrak{B}_{3,0}, \quad \vartheta \boldsymbol{J} = \pi_1(\mathfrak{G}_{2,0}),$$

oder

$$\boldsymbol{F} \in \mathfrak{G}_{2,0}, \quad \vartheta \boldsymbol{J} = (\pi_1 + \pi_2)(\mathfrak{A}_{2,0}).$$

In den beiden Ausnahmefällen ist F eine niedriger-dimensionale Untergruppe der *vollen* Autometrie-Gruppe von R.

Aus 4.3 folgt in 11:

4.4. R ist ein symmetrischer Raum.

5. Aus 4.1–2 folgt, dass ϑ auf $\boldsymbol{K}$ irreduzibel ist. Man kann daher 3 anwenden. Insbesondere ergibt sich 4.3 für nichthalbeinfaches $\boldsymbol{F}$.

Im weiteren Verlauf wird daher $\boldsymbol{F}$ als halbeinfach angenommen.

6. Aus 4.1–2 folgt, dass ϑJ sich auf der Abstandssphäre in $\boldsymbol{K}$ (mit der Metrik von R) im Kleinen transitiv benimmt.

Aus der in [3]) zitierten Arbeit seien die einfachen Folgerungen 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4 übernommen:

6.1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \in W$ oder $\lambda_1 - \lambda_2 \in W$.

6.2. Die Multiplizität des Nullgewichtes von ϑ ist 0 oder 1.

6.3. $0 \in \Lambda \rightarrow \Lambda \subset W$.

6.4. Ist $\boldsymbol{J}$ komplex nicht einfach, so ist $0 \notin \Lambda$.

Allgemein ist klar:

6.5. $\Lambda \cap W \neq \bigcirc \rightarrow 0 \in \Lambda$.

Ferner:

6.6. Wenn α, β Wurzelformen von $\boldsymbol{J}$ oder Gewichte von ϑ und $\boldsymbol{x}_\alpha$ bzw. $\boldsymbol{x}_\beta$ Vektoren zu α bzw. β sind, so ist $[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$ eine Linearkombination von solchen zu $\alpha + \beta$, oder es verschwindet.

7. Bei ϑJ ist auch invariant: $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$, seine lineare Hülle, ihre Projektion auf $\boldsymbol{K}$ und auf $\boldsymbol{J}$ in der Zerlegung $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}$. Wegen der Irreduzibilität von ϑ auf $\boldsymbol{K}$ ist die erste Projektion $= (\boldsymbol{O})$ oder $= \boldsymbol{K}$; ferner, wenn $\boldsymbol{J}$ einfach ist, ist die zweite $= (\boldsymbol{O})$ oder $= \boldsymbol{J}$.

8. Annahme: $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}] \not\subset \boldsymbol{J}$ und $0 \notin \Lambda$.

Sei λ das höchste Gewicht von ϑ (nach einer gegebenen Ordnung auf $\boldsymbol{H}$). Zu λ gehört der Gewichtsvektor $\boldsymbol{x}_\lambda$. Nach 6.5 gibt es keinen Wurzelvektor zu λ. Die Projektion der linearen Hülle von $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$, komplex erweitert, enthält $\boldsymbol{x}_\lambda$, nach 7. Daher gibt es $\mu, \nu \in \Lambda$ mit

$$\lambda = \mu + \nu.$$

Nach 6.5 sind $\mu, \nu \notin W$. Also nach 6.1

$$\alpha = \lambda + \mu \in W, \quad \beta = \lambda + \nu \in W.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta).$$

Da $\lambda, \lambda-\alpha, \lambda-\beta \in \Lambda$, sind

$$2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \text{ und } 2\frac{(\lambda, \beta)}{(\beta, \beta)} \text{ ganz positiv.}$$

Das ergibt

$$2(\alpha, \beta)=(\alpha, \alpha)=(\beta, \beta),$$
$$\gamma=\alpha-\beta \in W.$$

Die $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$ sind Wurzelformen von $\boldsymbol{F}$ (siehe 5). Da bilden

$$\beta, \lambda, \mu, \gamma \text{ eine } \nu\text{-Leiter}$$

der Länge 3. ($\gamma=0$ ist unmöglich, da man die Folge dann nach unten zu einer Leiter der Länge 6 fortsetzen könnte.) Also ist direkt

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Com}}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$$

mit

$$\boldsymbol{X} \in \mathfrak{G}_2,\ \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{J}_{\mathrm{Com}} \in \mathfrak{A}_2.$$

Wäre hier $\boldsymbol{Y} \neq (\boldsymbol{O})$, also $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Com}}$ nicht einfach, so ergäbe sich ein Widerspruch zu 3. Also ergibt sich hier als Lösung der zweite Ausnahmefall von 4.3.

9. Annahme: $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}] \not\subset \boldsymbol{J}$, $0 \in \Lambda$ und Rang $\boldsymbol{J}>1$.

Nach 6.4 ist $\boldsymbol{J}$ komplex einfach. Nach 7 ist die Projektion der linearen Hülle von $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$ auf $\boldsymbol{J}$ entweder $=(\boldsymbol{O})$ oder $=\boldsymbol{J}$. Im ersten Falle wäre $\boldsymbol{K}$ Ideal von $\boldsymbol{F}$, also ϑ auf $\boldsymbol{J}$ und auf $\boldsymbol{K}$ äquivalent. Die Multiplizität des Nullgewichtes wäre dem Range von $\boldsymbol{J}$ gleich. Nach 6.2 ist das unmöglich.

$[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$ ist ϑJ-invariant und spannt ganz $\boldsymbol{F}$ auf, denn sonst wären wieder ϑJ auf $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{K}$ äquivalent.

Sei λ das höchste Gewicht von ϑ. Dann ist $\lambda \neq 0$ und λ eine dominante Wurzelform. Gäbe es nur *eine* dominante Wurzelform $\neq 0$, so wäre die Multiplizität des Nullgewichtes gleich dem Rang von $\boldsymbol{J}$, also >1. Es muss also mindestens zwei dominante Wurzelformen $\neq 0$ geben. Das ist nur der Fall bei $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{G}_2$. Hier sind $\pi_3(\mathfrak{B}_1)$, $2\pi_1(\mathfrak{C}_1)$, $\pi_2(\mathfrak{C}_1)$, $\pi_1(\mathfrak{F}_4)$, $\pi_2(\mathfrak{F}_4)$, $\pi_2(\mathfrak{G}_2)$ wieder ausgeschlossen wegen einer Multiplizität >1 des Nullgewichts. Übrig bleiben

$$\pi_2(\mathfrak{B}_1),\ \pi_1(\mathfrak{G}_2).$$

Auch $\pi_2(\mathfrak{B}_1)$ kann ausgeschlossen werden: Zu ϱ_1 gehört ein Wurzelvektor $\boldsymbol{e}_{\varrho_1}$ und ein Gewichtsvektor $\boldsymbol{x}_{\varrho_1}$, zu 0 gehört ein Gewichtsvektor $\boldsymbol{x}_0$. Alle Elemente von $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$ vom Gewicht ϱ_1 sind abhängig von $[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{\varrho_1}]$, im Widerspruch dazu, dass $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}]$ ganz $\boldsymbol{F}$ aufspannt.

Übrig bleibt also nur der erste Ausnahmefall von 4.3.

10. Annahme: $0 \in \Lambda$ und Rang $\boldsymbol{J}=1$.

Dann ist dim $\boldsymbol{F}=6$, also $\boldsymbol{F}$ nicht einfach. Nach 3.2–3 erhält man ein $\boldsymbol{K}$ mit $[\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}] \subset \boldsymbol{J}$.

11. In den Ausnahmefällen von 4.3 ist F/J ein 7- bzw. 6-dimensionaler sphärischer oder elliptischer Raum, also jedenfalls ein symmetrischer Raum.

Im Hauptfall gibt es einen Automorphismus T von $\boldsymbol{F}$ mit

$$T=1 \text{ auf } \boldsymbol{J}, \quad =-1 \text{ auf } \boldsymbol{K}.$$

T setzt sich auf die einfach zusammenhängende Überlagerung F_1 von F fort. In F_1 erzeugt $\boldsymbol{J}$ eine zusammenhängende Untergruppe J_0 und $\boldsymbol{K}$ eine Menge K_0. Das gegebene $R=F/J$ ist kanonisch isometrisch mit F_1/J_1, wo J_1 eine gewisse Untergruppe des Normalisators von J_0 innerhalb F ist.

Da $F_1=K_0J_0$ ist, lässt T jede J_0 enthaltende Untergruppe von F_1 invariant. T lässt sich daher als Abbildung von F_1/J_1 auf sich auffassen. Mit T als Spiegelung an J_1 wird F_1/J_1 ein symmetrischer Raum. Also:

Unter den Voraussetzungen 4.1–2 ist R ein symmetrischer Raum, womit 4.4 bewiesen ist.